14.6 Metodi espliciti

14.6.1 Introduzione

In tutto il testo il metodo utilizzato per risolvere il sistema di equazioni generato dai vari modelli che abbiamo usato negli esempi è di tipo implicito.

Tuttavia, da qualche anno a questa parte hanno preso piede dei codici FE di tipo esplicito (vedremo tra poco cosa si intende), appositamente studiati per la simulazione di transitori dinamici fortemente non lineari (che prevedano cioè contatti estesi e variabili nel tempo, plasticizzazioni e rotture) e molto brevi, quali ad esempio i fenomeni di impatto. Attraverso questi codici è possibile simulare urti (ad esempio l'impatto di un volatile con il bordo di attacco di un'ala o il crash di una vettura contro una barriera), esplosioni (ad esempio di air bags) o determinati processi quali metal forming, imbutitura o lavorazioni meccaniche in generale.

Il metodo ha delle basi molto semplici. In sostanza prevede di riscrivere l'equazione generale del moto

$$[M]\cdot\{\ddot{u}\}+[D]\cdot\{\dot{u}\}+[K]\cdot\{u\}=\{F(t)\} \qquad (14.1)$$

nel seguente modo:

$$[M]\cdot\{\ddot{u}\}_t = (\{F\}-\{I\})_t \qquad (14.2)$$

essendo {F} il vettore delle forze esterne e {I} il vettore delle forze interne (elastiche e viscose); in particolare si ha:

$$\{I\} = [D]\cdot\{\dot{u}\} + [K]\cdot\{u\} \qquad (14.3)$$

Dalla (14.2) è possibile ricavare facilmente l'accelerazione:

$$\{\ddot{u}\}_t = [M]^{-1}\cdot(\{F\}-\{I\})_t \qquad (14.4)$$

Se [M] è una matrice diagonale il calcolo della sua inversa non presenta nessuna difficoltà e risulta velocissimo; [M] è diagonale se gli elementi finiti impiegati utilizzano per la modellazione della massa il metodo della "lumped mass", ossia concentrano la massa dell'elemento nei nodi invece di distribuirla su tutto il dominio dell'elemento stesso; questa approssimazione non altera i risultati in modo sensibile se la mesh è adeguatamente fitta.

Nota l'accelerazione all'istante t generico è possibile ricavare per integrazione numerica (ad esempio con il metodo di Eulero) la velocità in un istante successivo:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + \int_t \{\ddot{u}\}_t \cdot dt \qquad (14.5)$$

E analogamente:

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \int_t \{\dot{u}\}_t \cdot dt \qquad (14.6)$$

Si può quindi procedere al calcolo dell'accelerazione all'istante t+Δt e così via fino all'istante t_{fin} in cui si decide di interrompere lo studio del fenomeno.

Il metodo viene definito "esplicito" in quanto nelle (14.4), (14.5) e (14.6) i termini incogniti compaiono solamente a sinistra dell'uguale e pertanto la loro determinazione è molto veloce; infatti un codice esplicito impiega solo una minima parte del tempo totale di soluzione per lo svolgimento delle equazioni esplicite; la maggior parte dell'impegno sta nel calcolo del vettore {I}, perché è comunque necessario assemblare le matrici [D] e [K] e svolgere i prodotti matriciali.

Chiaramente il metodo presenta degli svantaggi; ad esempio non è garantita la convergenza della soluzione e per ridurre il rischio di ottenere risultati errati il passo di integrazione Δt va assunto opportunamente piccolo (esistono dei criteri per stabilire quale sia il massimo Δt utilizzabile). In secondo luogo appare evidente, guardando la (14.4), che affinché il metodo sia applicabile è necessario avere delle accelerazioni in gioco e quindi non è possibile studiare fenomeni statici, anche se in realtà con opportuni accorgimenti il metodo può essere impiegato soddisfacentemente anche per calcoli "quasi" statici; tuttavia, data la natura delle tecniche di soluzione adottate, un risultato sarà sempre ottenuto, ma non ci sarà una reale garanzia che sia "corretto", cosa invece assicurata con un metodo implicito: infatti, se si raggiunge la convergenza della soluzione, i risultati saranno corretti, almeno nei limiti della qualità del modello.

14.6.2 Confronto con il metodo implicito

Facciamo un confronto con la trave usata fino a qui, in particolare l'esempio della figura 14.12, risolvendo il caso dinamico con il metodo esplicito. Come detto il Δt deve essere scelto in modo opportuno (vedremo più avanti alcuni dettagli in merito ai criteri su cui si basa la scelta) e i codici attuali fanno la selezione in automatico, lasciando all'utente la definizione del Δt solamente per casi particolari. Per la nostra trave, quindi, noi non faremo altro che modificare il tipo di solutore da impiegare e lanciare il calcolo.

La figura 14.23 riporta il confronto dei risultati in termini di sollecitazione equivalente di Von Mises (per lo stesso punto della figura 14.15) e di spostamento (per lo stesso punto della figura 14.16). Come possiamo vedere i risultati sono diversi, anche se decisamente equivalenti dal punto di vista ingegneristico. Osserviamo tuttavia che lo scostamento tende ad aumentare mano a mano che ci si avvicina alla fine dell'analisi e questo si può spiegare con la "natura" del metodo esplicito cui facevamo cenno in precedenza: in particolare, gli errori di arrotondamento si sommano e, di conseguenza, analisi su tempi lunghi sono affette da errori maggiori. Questo spiega perché i metodi espliciti vanno benissimo per fenomeni rapidi e mal si adattano, a parte accorgimenti particolari, ai fenomeni quasi statici.